

Нумеричке методе - уводно предавање

1) Абсолютна и релативна грешка

Приликом израчунавања одређене бројевне вредности x неретко нисмо у прилици да је нађемо са потпуном тачношћу, већ смо принуђени да је апроксимирамо одговарајућом приближном вредношћу \bar{x} (нпр. већ кад користимо неки мерни инструмент, јавља нам се таква ситуација с обзиром на то да овај никад није апсолутно прецизан).

Дефиниција 1. Абсолютна вредност разлике $\Delta_x = |x - \bar{x}|$ се тада назива **абсолютна грешка**, док се количник $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x} = \frac{|x - \bar{x}|}{x}$ назива **релативна грешка** апроксимације вредности x вредношћу \bar{x} .

Релативну смо грешку обично процењујемо као

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{\bar{x}} = \delta_{\bar{x}}$$

јер нам је податак x углавном недоступан.

Информација о апсолутној грешки нам омогућава да одредимо интервал $[\bar{x} - \Delta_x, \bar{x} + \Delta_x]$ којем припада вредност x . Са практичног становишта, релативна грешка нам пружа реалнију информацију о могућем одступању које чинимо одговарајућом апроксимацијом јер нам даје информацију о величини могуће апсолутне грешке **у односу на** вредност коју рачунамо. Податак о могућој апсолутној грешки нам сам за себе не говори много (зато се нпр. свака опрема за мерење продаје са спецификацијом горње границе дозвољене релативне грешке за дати опсег мерења). Обично се изражава у процентима.

Пример 1. Уколико кажемо да вредност $\bar{x} = 1.2345$ апроксимира вредност x са горњом границом релативне грешке од 5%, имамо

$$\frac{|x - \bar{x}|}{\bar{x}} \leq 0.05, \quad |x - \bar{x}| \leq 0.05\bar{x}, \quad -0.05\bar{x} \leq x - \bar{x} \leq 0.05\bar{x}, \quad 0.95\bar{x} \leq x \leq 1.05\bar{x}, \\ 1.1728 \leq x \leq 1.2962,$$

док уколико кажемо да вредност $\bar{x} = 1.2345$ апроксимира вредност x са горњом границом релативне грешке од 0.5%, имамо

$$\frac{|x - \bar{x}|}{\bar{x}} \leq 0.005, \quad |x - \bar{x}| \leq 0.005\bar{x}, \quad -0.005\bar{x} \leq x - \bar{x} \leq 0.005\bar{x}, \quad 0.995\bar{x} \leq x \leq 1.005\bar{x}, \\ 1.2283 \leq x \leq 1.2407.$$

2) Записивање нумеричких података

С обзиром на то да нумерички подаци могу имати различит ред величине (0.0000001, 100000 и сл.), устаљен је тзв. начин записивања *у покретном зарезу уз помоћ мантисе и експонента*, односно сваки податак x записујемо у облику

$$x = (x)^* \cdot 10^e,$$

где **експонент** e бирамо тако да буде $(x)^* \in [0.1, 1)$. Део $(x)^*$ се тада назива **мантиса**.

Нпр. нормализовани запис броја 1.2345 биће $0.12345 \cdot 10^1$, што се још може записати и као $.12345 \cdot 10^1$ или једноставно $12345e1$ (како је у мантиси прва цифра

након децималне тачке по default-у различита од 0 - није неопходно да иста садржи ни децималну тачку ни нулу пре децималне тачке, управо то и јесте поента записа у покретном зарезу - користити што мање "меморије"). Planck-ова и Avogadr-ова константа, које су у SI систему записују као $h = 6.626068 \cdot 10^{-34} Js$ и $L = 6.02214129 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ се могу записати као $6626068e - 33Js$, односно $602214129e24mol^{-1}$.

3) Значајне и сигурне цифре

Вратимо се на тренутак Примеру 1. Видимо да би услов да је горње ограничење за релативну грешку једнако 5% могао да нам пружи само информацију о цифри са највећом тежином у вредности x (јер $1.1728 \leq x \leq 1.2962$ подразумева да је та цифра једнака 1, али не можемо да знамо да ли је прва цифра након децималне запете једнака 1 или 2), док би услов да је горње ограничење за релативну грешку једнако .5% могао да нам пружи сигурну информацију и о оној следећој цифри по тежини (из $1.2283 \leq x \leq 1.2407$ знамо да је та цифра једнака 2, док за ону следећу не знамо да ли је једнака 2, 3 или 4).

На основу изложеног можемо рећи да уколико неку вредност x апроксимирамо вредношћу $\bar{x} = 1.2345$ са горњим ограничењем од .5% за релативну грешку, цифре 1 и 2 представљају неку врсту сигурних цифара у податку \bar{x} (док би се у случају горњег ограничења од 5% за релативну грешку само цифра 1 могла сматрати сигурном).

Термин сигурне, тј. значајне цифре се формализује кроз следећу дефиницију.

Дефиниција 2. Значајне цифре неког броја су све цифре његовог децималног записа полазећи од прве "не-нула" цифре са леве стране. Другим речима, уколико је нека децимална вредност x записана у облику

$$x = \overline{c_{n-1}c_{n-2} \dots c_1c_0.c_{-1}c_{-2} \dots c_{-m}} = c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + c_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0 + c_{-1} \cdot 10^{-1} + c_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots + c_{-m} \cdot 10^{-m}, \quad c_{n-1} \neq 0,$$

све цифре $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-m}$ представљају значајне цифре броја x . Специјално, уколико је нумерички податак x записан у нормализованом облику (преко мантисе и експонента), значајне су све цифре које садржи мантиса - цифру 0 пре децималне тачке не рачунамо (податак о експоненту нам је, наравно, сав за себе битан јер нам даје информацију о реду величине одговарајућег нумеричког податка).

Дефиниција 3. Нека је $x' = (x') \cdot 10^e$, $x' \in [1, 1)$, број задат са горњом границом апсолутне грешке Δ . Тада кажемо да број x' садржи k **сигурних цифара** (у ширем смислу), где је k највећи природан број за који важи

$$\Delta < 10^{e-k}.$$

Притом под поменутих k цифара подразумевамо првих k значајних цифара слева.

Како је из описаног јасно да ова неједнакост не важи ако уместо k ставимо $k+1$, можемо рећи да је k природан број за који важи (у овом случају је атрибут "највећи" непотребан)

$$10^{e-(k+1)} \leq \Delta < 10^{e-k}, \quad \text{односно} \quad 10^{e-k-1} \leq \Delta < 10^{e-k}.$$

Такође, кажемо да број x' садржи l **сигурних цифара у ужем смислу**, где је l највећи природан број за који важи

$$\Delta < \frac{1}{2} \cdot 10^{e-l}$$

(или једноставно природан број за који важи $\frac{1}{2} \cdot 10^{e-(l+1)} \leq \Delta < \frac{1}{2} \cdot 10^{e-l}$; опет, под поменутих l цифара подразумевамо првих l значајних цифара слева).

Још једном да напоменемо, код нормализованог записа цифру 0 пре децималне тачке у мантиси (ако је уопште наведена) **не рачунамо** ни у значајне, ни у сигурне, ни у сигурне цифре у ужем смислу (као што је не рачунамо ни у било ком другом запису ако пре ње нема "не-нула" цифара). Тачно је да је на часу било дискутовано како би по неком критеријуму то са рачунањем цифре 0 у мантиси можда и имало смисла, али званично правило је ипак да се не рачуна.

У литератури се такође користе термини *значајне цифре у ширем смислу*, односно *значајне цифре у ужем смислу*. Из приложеног је јасно да је свака сигурна цифра у ужем смислу уједно и сигурна цифра у ширем смислу, као и да је свака сигурна цифра у ширем смислу уједно и значајна цифра.

У случају који смо разматрали имамо $\bar{x} = .12345 \cdot 10^1$, при чему у уколико горње ограничење за релативну грешку износи .5% - имамо да је горње ограничење за апсолутну грешку $\Delta = 0.005 \cdot \bar{x} = .0062$. Како је ($e = 1$)

$$10^{-3} \leq .0062 < 10^{-2},$$

односно

$$10^{1-4} \leq .0062 < 10^{1-3},$$

то је у складу са формулацијом дефиниције сигурних цифара $k = 3$, те се прве 3 цифре (1, 2 и 3) у броју \bar{x} сматрају сигурним. Слично, како је

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \leq .0062 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1},$$

односно

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{1-3} \leq .0062 < \frac{1}{2} \cdot 10^{1-2},$$

то је у складу са формулацијом дефиниције значајних цифара $l = 2$, те се прве 2 цифре (1 и 2) у броју \bar{x} сматрају сигурним у ужем смислу (што је потпуно у складу са пређашњом дискусијом интервала $[\bar{x} - \Delta_x, \bar{x} + \Delta_x]$). Значајне цифре у броју \bar{x} су 1, 2, 3, 4, 5.

Пример 2. Уколико је податак $\bar{x} = 0.03120700$ задат са гоњом границом за дозвољену апсолутну грешку $\Delta_{\bar{x}} = 0.5 \cdot 10^{-5}$, одредити сигурне цифре у ширем и ужем смислу у \bar{x} . Одредити и значајне цифре у \bar{x} .

Решење. Значајне цифре никада нису у корелацији са границама за грешку, у овом случају то су 3, 1, 2, 0, 7, 0, 0. Како је $e = -1$ ($0.03120700 = 0.3120700 \cdot 10^{-1}$) и

$$10^{-6} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 10^{-5},$$

за број k сигурних цифара треба да важи $-1 - k = -5$ односно $k = 4$. Дакле, сигурне цифре су 3, 1, 2, 0. Како не важи

$$0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-5},$$

(важи знак једнакости, али не важи знак " $<$ " који се формално захтева у дефиницији), то нема 4 већ 3 сигурне цифре у ужем смислу (јасно је да важи $0.5 \cdot 10^{-5} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$, односно $0.5 \cdot 10^{-1-(3+1)} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-1-3}$, тј. $l = 3$). Дакле, сигурне цифре у ужем смислу су 3, 1, 2. Да је нпр. гоња граница за дозвољену апсолутну грешку била $\Delta_{\bar{x}} = 0.49 \cdot 10^{-5}$, имали бисмо једнак број сигурних цифара у ширем и ужем смислу (по 4).

Интервал $[\bar{x} - \Delta_x, \bar{x} + \Delta_x]$ је $[0.03120200, 0.03121200]$, дакле опет се само сигурне цифре у ужем смислу испостављају заиста сигурним.

Пример 3. Заокружити број $\bar{x} = 72.353$, задат са горњом границом дозвољене апсолутне грешке $\Delta_x = 0.026$, тако да у добијеној вредности све цифре буду сигурне у ужем смислу.

Решење: Уколико тражену вредност означимо са \bar{x}' , њоме у старту правимо још додатну грешку од $|\bar{x}' - \bar{x}|$ јер ми, уствари, преко \bar{x}' долазимо до \bar{x} , а онда преко \bar{x} до x .

Заокруживање заиста јесте неопходно јер у $\bar{x} = 72.353 = .72353 \cdot 10^2$ цифра 3 ($k = 5$) није сигурна у ужем смислу с обзиром на то да није $.026 < .5 \cdot 10^{2-5} = .0005$.

Уколико заокружимо $\bar{x}' = 72.35 = .7235 \cdot 10^2$, дозвољена граница грешке се пење до

$$\Delta_{\bar{x}'} = |\bar{x}' - \bar{x}| + \Delta_x = .003 + .026 = .029,$$

што цифру 5 у \bar{x}' ($k = 4$) свакако не чини сигурном у ужем смислу с обзиром на то да није $.029 < .5 \cdot 10^{2-4} = .005$.

Уколико заокружимо $\bar{x}' = 72.4 = .724 \cdot 10^2$, дозвољена граница грешке се пење до

$$\Delta_{\bar{x}'} = |\bar{x}' - \bar{x}| + \Delta_x = .047 + .026 = .073,$$

што цифру 4 у \bar{x}' ($k = 3$) исто не чини сигурном у ужем смислу с обзиром на то да није $.073 < .5 \cdot 10^{2-3} = .05$.

Уколико заокружимо $\bar{x}' = 72. = .72 \cdot 10^2$, дозвољена граница грешке се пење до

$$\Delta_{\bar{x}'} = |\bar{x}' - \bar{x}| + \Delta_x = .353 + .026 = .379,$$

што цифру 2 у \bar{x}' ($k = 2$) чини сигурном у ужем смислу (а самим тим и цифру 7) с обзиром на то да је $.379 < .5 \cdot 10^{2-2} = .5$.

Пример 4. Одредити са колико сигурних цифара у ширем и ужем смислу број $\bar{x} = .2518$ апроксимира $x = .2522$.

Решење: Имамо $\Delta = .0004 = .4 \cdot 10^{-3} < 10^{0-3}$ ($\bar{x} = .2518 \cdot 10^0$, $k = 0$) и $\Delta > 10^{0-4}$, одакле закључујемо да \bar{x} садржи 3 сигурне цифре у ширем смислу. Одмах видимо да има и исто толико цифара сигурних у ужем смислу јер је

$$.5 \cdot 10^{0-4} < .4 \cdot 10^{-3} < .5 \cdot 10^{0-3}.$$

Подаци x и \bar{x} се поклапају на 2 значајне цифре.

Посматрајмо сада ситуацију у којој број $\bar{x} = .2998$ апроксимира $x = .3002$. На основу решења претходног задатка јасно је да је и у овом случају број сигурних цифара и у ширем и у ужем смислу у броју \bar{x} као апроксимацији броја x једнак 3, али x и \bar{x} се не поклапају ни у једној значајној цифри!

Пример 5. Величину $x = .123456$ на 5 значајних цифара можемо заокружити као $\bar{x} = .12345$ или $\bar{x}' = .12346$ - што је по правилу заокруживања. У првом случају је $\Delta = .000006 = .6 \cdot 10^{-5}$, одакле на основу $10^{0-6} < .6 \cdot 10^{-5} < 10^{0-5}$ ($e = 0$) закључујемо да \bar{x} садржи 5 сигурних цифара у ширем смислу (то су 1, 2, 3, 4, 5). Слично, у другом случају је $\Delta = .000004 = .4 \cdot 10^{-5}$, и опет на основу $10^{0-6} < .4 \cdot 10^{-5} < 10^{0-5}$ закључујемо да \bar{x}' садржи 5 сигурних цифара у ширем смислу. Како, такође, важи $.5 \cdot 10^{0-6} < .4 \cdot 10^{-5} < .5 \cdot 10^{0-5}$, то у другом случају имамо и 5 сигурних цифара у ужем смислу, али их зато у првом случају имамо 4 (1, 2, 3, 4) с обзиром на то да је $.5 \cdot 10^{0-5} < .6 \cdot 10^{-5} < .5 \cdot 10^{0-4}$.

Постоје две теореме којима се описује веза између броја сигурних цифара у податку којим апроксимирамо одговарајућу вредност и релативне грешке те

апроксимације (у принципу се ради о исказу истог типа формулисаном на два различита начина).

Теорема 1. Уколико вредност x апроксимирамо вредношћу \bar{x} са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\bar{x}}$, при чему \bar{x} садржи k сигурних цифара, онда важи

$$\frac{1}{(\alpha_1 + 1) \cdot 10^k} \leq \delta_{\bar{x}} < \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}},$$

где је α_1 прва значајна цифра у \bar{x} . Слично, уколико вредност x апроксимирамо вредношћу \bar{x} са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\bar{x}}$, при чему \bar{x} садржи l сигурних цифара у ужем смислу, онда важи

$$\frac{1}{2(\alpha_1 + 1) \cdot 10^l} \leq \delta_{\bar{x}} < \frac{1}{2\alpha_1 \cdot 10^{l-1}}.$$

Теорема 2. Уколико вредност x апроксимирамо вредношћу \bar{x} са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\bar{x}}$, при чему \bar{x} садржи k сигурних цифара, онда важи

$$k < -\log_{10} |(\bar{x})^*| - \log_{10} \delta_{\bar{x}},$$

где $(\bar{x})^*$ представља нормализовану мантису броја \bar{x} . Слично, уколико вредност x апроксимирамо вредношћу \bar{x} са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\bar{x}}$, при чему \bar{x} садржи l сигурних цифара у ужем смислу, онда важи

$$l < -\log_{10} |(\bar{x})^*| - \log_{10} (2\delta_{\bar{x}}),$$

где $(x')^*$ представља нормализовану мантису броја \bar{x} .

Како због $|(x')^*| \in [.1, 1) = [10^{-1}, 10^0)$ важи $\log_{10} |(\bar{x})^*| \in [-1, 0)$, док је у случајевима који су повољни са практичног аспекта (када је $\delta_{\bar{x}}$ што је могуће мањег реда величине) $\log_{10} \delta_{\bar{x}}$ негативан број по апсолутној вредности пуно већи од 1, имају смисла апроксимације $k \approx -\log_{10} \delta_{\bar{x}}$ и $l \approx -\log_{10} (2\delta_{\bar{x}})$.